JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 25, 176–185 (1979)

Beste Quadraturformeln für Inzidenzmatrizen ohne ungerade gestützte Sequenzen

MICHAEL STIEGLITZ

Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, Englerstrasse 2, 7500 Karlsruhe 1, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received April 27, 1976

1. EINLEITUNG

Ist $E = (e_{\mu\nu})_{0\leqslant\mu\leqslant m, 0\leqslant\nu\leqslant n-1}$ mit $e_{\mu\nu} = 0$ oder 1, $m, n \in \mathbb{N}$, eine Inzidenzmatrix mit mindestens einer Eins, $e(E) := \{(\mu, \nu): e_{\mu\nu} = 1\}$ und $X = (x_0, ..., x_m)$ eine Menge von Knoten x_μ mit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$, so läßt sich dem Paar (E, X) die konevxe Menge $\mathscr{R}(E, X)$ aller auf $C^n[0, 1]$ durch die Vorschrift

$$R(f) := \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{(\mu,\nu)\in e(E)} a_{\mu\nu} f^{(\nu)}(x_\mu)$$

definierten reellen linearen Restfunktionale R mit $R(\pi_{n-1}) = 0$ zuordnen. $\mathscr{R}(E, X)$ ist also eine Menge von Quadraturformeln, die für Polynome vom Höchstgrad $n - 1$ exakt sind. Im folgenden geht es um das Problem, innerhalb einer gewissen Klasse von Inzidenzmatrizen E diejenigen E zu charakterisieren, für welche $\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$ ist für alle Knotenmengen X. Für diese E läßt sich dann zeigen, daß es zu jedem X in $\mathscr{R}(E, X)$ genau eine beste Quadraturformel im Sinn von Sard gibt.

Das genannte Problem haben Micchelli und Rivlin [9, S. 97] für die Klasse der quasi-Hermite-Matrizen gelöst, indem sie bewiesen, daß genau dann $\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$ ist für alle X, wenn E eine Pólya-Matrix ist, also einer sehr leicht nachprüfbaren Bedingung genügt (Definitionen in Nr. 2). In Nr. 3 wird nun gezeigt, daß dieses Ergebnis auch für die größere Klasse der Inzidenzmatrizen ohne ungerade gestützte Sequenzen richtig ist. Zum Beweis dieser Verallgemeinerung werden teilweise andere Methoden als in [9] benutzt. Während nämlich Micchelli und Rivlin den Nachweis, daß E notwendig eine Pólya-Matrix ist, durch Grenzübergang von geeigneten Knotenmengen gegen X bewiesen, wobei sie die typische Struktur der quasi-Hermite-Matrizen geschickt ausnutzten, werden hier die elementare Theorie linearer Gleichungs-

0021-9045/79/020176-10$02.00/0

systeme und ein tiefer liegendes Ergebnis von Ferguson [3] über bedingte Regularität von Inzidenzmatrizen verwendet. Zum Beweis in umgekehrter Richtung wird wie bei Micchelli und Rivlin die von Schoenberg [10], [12], [13], [14] eingeführte und von Greville [4], [5] und Karlin [6] ausgebaute Beziehung zwischen Quadraturformeln und Monosplines verwendet.

Daß $\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$ ist, folgt unmittelbar aus der von Atkinson und Sharma [1] bewiesenen Tatsache, daß eine Pólya-Matrix ohne ungerade gestützte Sequenzen n-regulär ist. In Nr. 4 wird dieses Ergebnis durch den Satz verallgemeinert, daß jede Pólya-Matrix der Ordnung k, $1 \leqslant k \leqslant n$, ohne ungerade gestützte Sequenzen k-regulär ist. Für quasi-Hermite-Matrizen stammt dieser Satz von Schoenberg [12, S. 225].

2. Definitionen, Quadraturformeln und Monosplines

In dieser Nummer werden einige Ergebnisse über Pólya-Matrizen und über den Zusammenhang zwischen Quadraturformeln und Monosplines bereitgestellt, die im folgenden benötigt werden.

Es seien E und X wie in Nr. 1 gewählt. Ferner sei $N_\nu(E) := \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu} e_{\mu\lambda}$ und $N(E) := N_{n-1}(E)$ gesetzt. Dann heißt das Paar (E, X) für ein k mit $1 \leqslant k \leqslant N(E)$ *k-regulär*, wenn von allen $p \in \pi_{k-1}$ nur $p = 0$ (E, X) *homogen interpoliert*, also die Bedingungen

$$p^{(\nu)}(x_\mu) = 0 \qquad \text{für alle} \quad (\mu, \nu) \in e(E)$$

erfüllt. Natürlich ist (E, X) genau dann $N(E)$-regulär, wenn

$$D(E, X) := \det_{(\mu,\nu)\in e(E)} \left(\frac{x_\mu^{N(E)-1-\nu}}{(N(E)-1-\nu)!}, \ldots, \frac{x_\mu^{-\nu}}{(-\nu)!} \right) \neq 0$$

ist. Dabei wurde $x^0 := 1$ und $x^{-\nu}/(-\nu)! := 0$ für $\nu \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gesetzt. E heißt *k-regulär*, falls (E, X) für alle X k-regulär ist.

E ist eine *quasi-Hermite-Matrix*, wenn für alle $1 \leqslant \mu \leqslant m-1$ aus $e_{\mu\nu} = 1$ folgt, daß $e_{\mu\lambda} = 1$ ist für alle $0 \leqslant \lambda \leqslant \nu$. Eine *Sequenz* in E ist eine Folge $(e_{\mu\nu}, e_{\mu,\nu+1}, \ldots, e_{\mu,\nu+\lambda})$, die den Bedingungen $\lambda \geqslant 0$ und $(\mu, \nu), \ldots, (\mu, \nu+\lambda) \in e(E)$ sowie $(\mu, \nu-1)$, $(\mu, \nu+\lambda+1) \notin e(E)$ genügt. Dabei sei durch Definition $(\mu, -1)$, $(\mu, n) \notin e(E)$. Eine Sequenz heißt *ungerade*, wenn die Anzahl ihrer Elemente ungerade ist. Die obige Sequenz heißt *gestützt*, wenn es Indizes μ', μ'', ν', ν'' mit $0 \leqslant \mu' < \mu < \mu'' \leqslant m$, $0 \leqslant \nu', \nu'' < \nu$ und (μ', ν'), $(\mu'', \nu'') \in e(E)$ gibt. Eine quasi-Hermite-Matrix z.B. besitzt keine gestützten Sequenzen.

Im Zusammenhang mit der Frage der k-Regularität ist der folgende Begriff wichtig: E heißt für ein k mit $1 \leqslant k \leqslant n$ *Pólya-Matrix der Ordnung k*, kurz

k-Pólya, wenn $N_\nu(E) \geqslant \nu + 1$ ist für alle $0 \leqslant \nu \leqslant k - 1$. Eine n-Pólya-Matrix heißt auch *Pólya-Matrix*. Gilt sogar $N_\nu(E) \geqslant \nu + 2$ für alle $0 \leqslant \nu \leqslant n - 2$, so liegt eine *Birkhoff-Matrix* vor. Eine große Klasse $N(E)$-regulärer Matrizen haben Atkinson und Sharma [1, S. 232] und (mit vereinfachtem Beweis) Lorentz und Zeller [8, S. 43] angegeben.

SATZ AS. *Eine Pólya-Matrix E ohne ungerade gestützte Sequenzen ist n-regulär.*

E heißt *bedingt regulär*, falls es ein X mit $D(E, X) \neq 0$ gibt. Ferguson [3, S. 23] (vgl. auch Birkhoff [2] und Lorentz [7, S. 485]) hat diese Matrizen durch den folgenden Satz charakteriesiert.

SATZ F. *Im Fall $N(E) = n$ ist E genau dann bedingt regulär, wenn E eine Pólya-Matrix ist.*

Zur Formulierung der nächsten Sätze werden noch weitere Begriffe benötigt. Bezeichnet man mit E^* die Inzidenzmatrix, die aus E durch Streichen der Zeilen $\mu = 0$ und $\mu = m$ hervorgeht, so sei für $k \geqslant n$ $\mathscr{M}_k(E^*, X)$ die konvexe Menge aller reellen Monosplines M vom Grad k,

$$M(t) := \frac{t^k}{k!} + p(t) + \sum_{(\mu,\nu)\in e(E^*)} b_{\mu\nu} \frac{(t - x_\mu)_+^{k-1-\nu}}{(k-1-\nu)!}, \qquad p \in \pi_{k-1},$$

die den Bedingungen

$$\begin{aligned} M^{(k-1-\nu)}(0) &= 0 \qquad \text{für} \quad (0, \nu) \notin e(E) \\ M^{(k-1-\nu)}(1) &= 0 \qquad \text{für} \quad (m, \nu) \notin e(E) \end{aligned} \tag{1}$$

genügen. Dabei wurde für $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $t_+^\nu := t^\nu$ für $t \geqslant 0$, $t_+^\nu := 0$ für $t < 0$, $(t_+^0)' := 0$ und $(t_+)' := t_+^0$ für $t \in \mathbb{R}$ gesetzt. Insbesondere ist für $M \in \mathscr{M}_k(E^*, X)$,

$$M^{(k-1-\nu)}(x_\mu+) - M^{(k-1-\nu)}(x_\mu-) = 0 \qquad \text{für} \quad (\mu, \nu) \notin e(E^*). \tag{2}$$

Entsprechend sei $\mathscr{S}_{k-1}(E^*, X)$ der lineare Raum aller reellen Polynomsplines S vom Grad $k - 1$,

$$S(t) := p(t) + \sum_{(\mu,\nu)\in e(E^*)} b_{\mu\nu} \frac{(t - x_\mu)_+^{k-1-\nu}}{(k-1-\nu)!}, \qquad p \in \pi_{k-1},$$

die den Bedingungen (1) und eo ipso auch (2) genügen. Mit diesen Bezeichnungen und der Abkürzung $\|f\|_2 := (\int_0^1 (f(t))^2\, dt)^{1/2}$ lautet

SATZ S. *Versieht man $\mathscr{R}(E, X)$ mit der Norm* $\| R \| := \sup_{\|f^{(n)}\|_2 \leqslant 1} | R(f)|$

und $\mathscr{M}_n(E^*, X)$ mit der $L_2[0, 1]$-Norm $\| M \|_2$, so existiert eine isometrische Abbildung φ zwischen den konvexen, abgeschlossenen Mengen $\mathscr{R}(E, X)$ und $\mathscr{M}_n(E^*, X)$. Insbesondere gelten für $M := \varphi R$ mit

$$R(f) := \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{(\mu,\nu)\in e(E)} a_{\mu\nu} f^{(\nu)}(x_\mu)$$

die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{0\nu} &= (-1)^{\nu+1} M^{(n-1-\nu)}(0) \qquad \text{für} \quad (0, \nu) \in e(E),\\ a_{\mu\nu} &= (-1)^{\nu+1}(M^{(n-1-\nu)}(x_\mu+) - M^{(n-1-\nu)}(x_\mu-)) \qquad \text{für} \quad (\mu, \nu) \in e(E^*),\\ a_{m\nu} &= (-1)^{\nu} M^{(n-1-\nu)}(1) \qquad \text{für} \quad (m, \nu) \in e(E). \end{aligned} \tag{3}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu den Ausführungen von Karlin [6, S.61 ff.] und kann daher kurz gefaßt werden. Definiert man (formal) $M(t) := \varphi R(t)$ für $0 \leqslant t < 1$ durch $R[(t - \cdot)^{n-1}/(n-1)!]$, so erhält man

$$\begin{aligned} M(t) = \frac{t^n}{n!} &+ \sum_{(0,\nu)\in e(E)} (-1)^{\nu-1} a_{0\nu} \frac{t^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}\\ &+ \sum_{(\mu,\nu)\in e(E^*)} (-1)^{\nu+1} a_{\mu\nu} \frac{(t - x_\mu)_+^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}, \end{aligned} \tag{4}$$

also einen Monospline vom Grad n, falls man M auf ganz $\mathbb{R}$ durch die rechte Seite in (4) fortsetzt. Daß $M \in \mathscr{M}_n(E^*, X)$ ist und (3) genügt, zeigt man durch direktes Ausrechnen, wobei man für (m, ν) mit $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$ und $t \in (x_{m-1}, 1)$ die wegen $R(\pi_{n-1}) = 0$ geltende Beziehung

$$\begin{aligned} M^{(n-1-\nu)}(t) &= R^{(n-1-\nu)} \left[\frac{(t - \cdot)_+^{n-1}}{(n-1)!}\right] = (-1)^n R^{(n-1-\nu)} \left[\frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!}\right]\\ &= \frac{(t-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \sum_{(m,\lambda)\in e(E)} (-1)^{\nu} a_{m\lambda} \frac{(1-t)^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!} \end{aligned}$$

sowie die linksseitige Stetigkeit von $M^{(n-1-\nu)}(t)$ in $t = 1$ ausnutzt. Wegen (3) ist φ eineindeutig. Ferner ist $\mathscr{M}_n(E^*, X)$ φ-Bildraum von $\mathscr{R}(E, X)$, denn durch n-fache partielle Integration von $\int_{x_\mu}^{x_{\mu+1}} M(t) f^{(n)}(t)\, dt$ für $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ und Summation über alle Teilintervalle erhält man für alle Funktionen

$$M(t) := \sum_{\nu=-1}^{n-1} (-1)^{\nu+1} b_\nu \frac{t^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!} + \sum_{(\mu,\nu)\in e(E^*)} (-1)^{\nu+1} b_{\mu\nu} \frac{(t - x_\mu)_+^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}$$

und für alle auf [0, 1] definierten Funktionen f mit absolutstetiger $(n-1)$-ter Ableitung

$$\begin{aligned}\int_0^1 M^{(n)}(t) f(t)\,dt &\\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu+1} M^{(n-1-\nu)}(0) f^{(\nu)}(0)\\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu+1}(M^{(n-1-\nu)}(x_\mu+) - M^{(n-1-\nu)}(x_\mu-)) f^{(\nu)}(x_\mu)\\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} M^{(n-1-\nu)}(1) f^{(\nu)}(1) + (-1)^n \int_0^1 M(t) f^{(n)}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man also

$$R(f) := (-1)^n \int_0^1 M(t) f^{(n)}(t)\,dt, \tag{6}$$

so ist für $M \in \mathscr{M}_n(E^*, X)$ wegen $M^{(n)}(t) \equiv 1$, (1), (2) und (5) $\varphi R = M$, also die Behauptung bewiesen. Daß $\| R \| = \| \varphi R \|_2$ ist, folgt aus (6) und $\varphi R = M$ mit Hilfe der Schwarzschen Gleichung und Ungleichung. Die L_2-Abgeschlossenheit von $\mathscr{M}_n(E^*, X)$ schließlich folgt aus der Abgeschlossenheit von $\mathscr{R}(E, X)$. Diese zeigt man unter Verwendung von Cauchy-Folgen mit dem Standardbeweis.

Der folgende Hilfssatz stammt im Fall einfacher Knoten $x_1, \ldots, x_{m-1}$ von Greville [5, S. 16] und Schoenberg [14, S. 284] und im Fall von quasi-Hermite-Matrizen von Micchelli und Rivlin [9, S. 96]. Man beweist ihn unter Verwendung von (5) für $b_{-1} := 0$ wie bei Micchelli und Rivlin.

SATZ MR. *(E, X) ist genau dann n-regulär, wenn von allen $S \in \mathscr{S}_{2n-1}(E^*, X)$ nur $S = 0$ das Paar (E, X) homogen interpoliert.*

3. BESTE QUADRATURFORMELN

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, die Existenz bester Quadraturformeln für Pólya-Matrizen zu beweisen. Dabei ist $R^* \in \mathscr{R}(E, X)$ eine *beste Quadraturformel* im Sinn von Sard, wenn $\| R^* \| = \min_{R \in \mathscr{R}(E,X)} \| R \|$ ist.

SATZ 1. *Für eine Inzidenzmatrix $E = (e_{\mu\nu})_{0 \leqslant \mu \leqslant m, 0 \leqslant \nu \leqslant n-1}$ ohne ungerade gestützte Sequenzen gilt: Genau dann ist $\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$ für alle Knotenmengen $X = (x_0, \ldots, x_m)$ mit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$, wenn E eine*

Pólya-Matrix ist. In diesem Fall gibt es eine beste Quadraturformel R^*, nämlich

$$R^*(f) := \int_0^1 f(t)\,dt - \Big[\sum_{(0,\nu)\in e(E)} (-1)^{\nu+1} M^{*(n-1-\nu)}(0) f^{(\nu)}(0)$$

$$+ \sum_{(\mu,\nu)\in e(E^*)} (-1)^{\nu+1} (M^{*(n-1-\nu)}(x_\mu+) - M^{*(n-1-\nu)}(x_\mu-)) f^{(\nu)}(x_\mu)$$

$$+ \sum_{(m,\nu)\in e(E)} (-1)^{\nu} M^{*(n-1-\nu)}(1) f^{(\nu)}(1)\Big] \tag{7}$$

mit $M^* := N^{*(n)}$, wobei $N^* \in \mathscr{M}_{2n}(E^*, X)$ der eindeutig bestimmte Monospline ist, der (E, X) homogen interpoliert.

Beweis. Die Aussage $[\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$ für alle $X]$ bedeutet, daß zu jedem X ein

$$R(E, X)(f) =: \int_0^1 f(t)\,dt - \sum_{(\mu,\nu)\in e(E)} a_{\mu\nu}(E, X) f^{(\nu)}(x_\mu)$$

mit $R(E, X)(\pi_{n-1}) = 0$ existiert. Das wiederum heißt, daß für jedes X das zugehörige inhomogene Gleichungssystem mit n linearen Gleichungen für die $N(E)$ Unbekannten $a_{\mu\nu}(E, X)$ lösbar ist. Bezeichnet man daher die $(N(E), n)$-Koeffizientenmatrix des homogenen Systems mit

$$A(E, X) := \left(\frac{x_\mu^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}, \dots, \frac{x_\mu^{-\nu}}{(-\nu)!}\right)_{(\mu,\nu)\in e(E)},$$

wobei die durch $(\mu, \nu) \in e(E)$ indizierten Zeilen lexikographisch angeordnet seien, und die erweiterte $(N(E) + 1, n)$-Matrix des inhomogenen Systems mit

$$B(E, X) := \begin{pmatrix} \dfrac{x_\mu^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!} & ,\dots, & \dfrac{x_\mu^{-\nu}}{(-\nu)!} \\ \dfrac{1}{n!} & & \dfrac{1}{1!} \end{pmatrix}_{(\mu,\nu)\in e(E)},$$

so gilt

$$[\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing \text{ für alle } X] \Leftrightarrow [\operatorname{rg} A(E, X) = \operatorname{rg} B(E, X) \text{ für alle } X]. \tag{8}$$

Zunächst wird gezeigt, daß E eine Pólya-Matrix ist. Dazu wird die Voraussetzung, daß E keine ungeraden gestützten Sequenzen besitzt, nicht benötigt. Sicher ist E 1-Pólya. Wäre E keine Pólya-Matrix, so gäbe es ein l mit $2 \leqslant l \leqslant n$ derart, daß E $(l-1)$-Pólya, aber nicht l-Pólya ist. Die aus den ersten l Spalten von E bestehende $(m+1, l)$-Inzidenzmatrix E_1 besitzt also $l-1$ Einsen. Außerdem ist für alle X

$$R(E_1, X)(f) := \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{(\mu,\nu)\in e(E_1)} a_{\mu\nu}(E, X) f^{(\nu)}(x_\mu)$$

aus $\mathscr{R}(E_1, X)$, also $\mathscr{R}(E_1, X) \neq \varnothing$ und wegen (8) daher

$$\operatorname{rg} B(E_1, X) = \operatorname{rg} A(E_1, X) \leqslant l-1 \qquad \text{für alle } X. \tag{9}$$

Betrachtet man andererseits die $(m+1, l+1)$-Inzidenzmatirx

$$E_2 := \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & E_1 \\ 0 & \\ 1 & \end{array} \right\|,$$

so ist E_2 eine Pólya-Matrix mit $l+1$ Einsen. Daher gibt es nach Satz F ein $\bar{X}$ mit $D(E_2, \bar{X}) \neq 0$. Durch Ausrechnen bestätigt man

$$\begin{aligned} D(E_2, \bar{X}) &= \pm\det \begin{pmatrix} 0 & ,\ldots, & 0 & , & 1 \\ \dfrac{\bar{x}_\mu^{\,l-1-\nu}}{(l-1-\nu)!} & ,\ldots, & \dfrac{\bar{x}_\mu^{\,-\nu}}{(-\nu)!} & , & \dfrac{\bar{x}_\mu^{\,-\nu-1}}{(-\nu-1)!} \\ \dfrac{1}{l!} & ,\ldots, & \dfrac{1}{1!} & , & 1 \end{pmatrix}_{(\mu,\nu)\in e(E_1)} \\ &= \pm\det B(E_1, \bar{X}). \end{aligned}$$

Also ist für die (l, l)-Matrix $B(E_1, \bar{X})$ der $\operatorname{rg} B(E_1, \bar{X}) = l$, im Widerspruch zu (9).

Ist umgekehrt E eine Pólya-Matrix, so ist E nach Satz AS sogar n-regulär. Daraus folgt $\operatorname{rg} A(E, X) = n$ für alle X und somit (8).

Es bleibt noch zu zeigen, daß R^* aus (7) beste Quadraturformel ist. Nach Voraussetzung ist $\mathscr{R}(E, X) \neq \varnothing$, also nach Satz S auch $\mathscr{M}_n(E^*, X) \neq \varnothing$. Da $\mathscr{M}_n(E^*, X)$ eine L_2-abgeschlossene, konvexe Menge ist, existiert genau ein $M^* \in \mathscr{M}_n(E^*, X)$ mit $\| M^* \|_2 = \min_{M\in\mathscr{M}_n(E^*,X)} \| M \|_2$ (vgl. etwa [15, S. 54]). M^* ist wegen $\mathscr{M}_n(E^*, X) = M^* + \mathscr{S}_{n-1}(E^*, X)$ durch die Bedingung

$$\int_0^1 M^*(t)\, S(t)\, dt = 0 \qquad \text{für alle} \quad S \in \mathscr{S}_{n-1}(E^*, X)$$

charakterisiert, d.h. auch, wenn man $N^{*(n)} := M^*$ setzt, durch die Bedingung

$$\int_0^1 N^{*(n)}(t)\, S^{(n)}(t)\, dt = 0 \qquad \text{für alle} \quad S \in \mathscr{S}_{2n-1}(E^*, X).$$

Nach Satz MR gibt es genau ein $N \in \mathscr{M}_{2n}(E^*, X)$, das (E, X) homogen interpoliert, da es sich hier um $2n + N(E^*)$ lineare Gleichungen in ebensoviel unbekannten Koeffizienten handelt. Setzt man für ein beliebiges $S \in \mathscr{S}_{2n-1}(E^*, X)$ in (5) speziell $M := S^{(n)} \in \mathscr{S}_{n-1}(E^*, X)$ und $f := N$, so erhält man wegen $S^{(2n)} = 0$

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1} &\int_0^1 S^{(n)}(t)\, N^{(n)}(t)\, dt \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu+1} S^{(2n-1-\nu)}(0)\, N^{(\nu)}(0) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu+1} (S^{(2n-1-\nu)}(x_\mu+) - S^{(2n-1-\nu)}(x_\mu-)) N^{(\nu)}(x_\mu) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} S^{(2n-1-\nu)}(1)\, N^{(\nu)}(1) = 0.\end{aligned}$$

Also ist $N = N^*$ und somit nach Satz S $\| R^* \| = \min_{R \in \mathscr{R}(E,X)} \| R \|$.

4. k-Reguläre Inzidenzmatrizen ohne ungerade gestützte Sequenzen

Der folgende Satz 2 zeigt, daß sich die k-Regularität einer Inzidenzmatrix ohne ungerade gestützte Sequenzen direkt aus der Verteilung von Nullen und Einsen ablesen läßt.

Satz 2. *Es sei $E = (e_{\mu\nu})_{0 \leqslant \mu \leqslant m, 0 \leqslant \nu \leqslant n-1}$ eine Inzidenzmatrix ohne ungerade gestützte Sequenzen und $1 \leqslant k \leqslant n$. Dann ist E genau dann k-regulär, wenn E k-Pólya ist.*

Beweis. Nach Schoenberg [11, S. 540] ist die Bedingung notwendig. Umgekehrt sei E nun k-Pólya und ohne ungerade gestützte Sequenzen. Ist E eine Pólya-Matrix, so ist E nach Satz AS n-regulär, also wegen $k \leqslant n$ erst recht k-regulär. Ist E keine Pólya-Matrix, so gibt es ein l mit $k \leqslant l < n$ derart, daß E l-Pólya, aber nicht $(l+1)$-Pólya ist. Die aus den ersten l Spalten von E bestehende $(m+1, l)$-Inzidenzmatrix E_1 besitzt also l Einsen und keine ungeraden gestützten Sequenzen. Stellt man nun E_1 in kanonischer Weise als $E_1 = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$ dar, so ist jedes A_ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, entweder eine $(m+1, 1)$-Inzidenzmatrix mit einer Eins oder eine $(m+1, N(A_\rho))$-

Birkhoff-Matrix mit $N(A_\rho)$ Einsen und ohne ungerade gestützte Sequenzen, also $N(A_\rho)$-regulär.

Es sei $B := A_s$ mit $1 \leqslant s \leqslant r$ die Inzidenzmatrix, welche die $(k-1)$-te Spalte von E enthält, etwa als $(\kappa - 1)$-te Spalte. Dann ist B entweder eine $(m+1, 1)$-Inzidenzmatrix mit einer Eins, also B und damit die $(m+1, k)$-Inzidenzmatrix $E_2 := A_1 \oplus \cdots \oplus A_{s-1} \oplus B$ mit k Einsen k-regulär, also auch E k-regulär.

Oder B ist eine $(m+1, N(A_s))$-Birkhoff-Matrix mit $N(A_s)$ Einsen und ohne ungerade gestützte Sequenzen. Dann werden in B $t := \sum_{\sigma=1}^{s} N(A_\sigma) - k \geqslant 0$ Einsen nach folgender Vorschrift gestrichen: zunächst werden in der letzten Spalte oben beginnend ungestützte Einsen gestrichen, danach (bei Bedarf) gestützte Einsen, dies allerdings nur paarweise, d.h. mit jeder gestützten Eins wird auch die unmittelbar links daneben stehende Eins gestrichen. Wenn nötig, wird dieser Prozeß in der vorletzten Spalte fortgesetzt, usw. Kann man auf diese Weise nur $t - 1$ Einsen streichen, so wird in der 0-ten Spalte noch eine weitere Eins gestrichen. Dann enthält die Restmatrix B_1 $N(A_s) - t = \kappa$ Einsen und keine ungeraden gestützten Sequenzen. Nach dem obigen Streichungsverfahren ist B_1 außerdem κ-Pólya, wie eine kurze Überlegung zeigt. Streicht man daher in B_1 die Nullspalten mit Spaltenindex $\geqslant \kappa$, so ist die verbleibende $(m+1, \kappa)$-Inzidenzmatrix B_2 nach Satz AS κ-regulär. Daher ist die $(m+1, k)$-Inzidenzmatrix $E_3 := A_1 \oplus \cdots \oplus A_{s-1} \oplus B_2$ mit k Einsen k-regulär, also auch E k-regulär.

Literatur

1. K. Atkinson and A. Sharma, A partial characterization of poised Hermite–Birkhoff interpolation problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **6** (1969), 230–235.
2. G. D. Birkhoff, General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **7** (1906), 107–136.
3. D. Ferguson, The question of uniqueness for G. D. Birkhoff interpolation problems, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 1–28.
4. T. N. E. Greville, Spline functions, interpolation and numerical quadrature, *in* "Mathematical Methods for Digital Computers" (A. Ralston and H. S. Wilf, Eds.), Vol. 2, pp. 156–168, Wiley, New York, 1967.
5. T. N. E. Greville, Introduction to spline functions, *in* "Theory and Applications of Spline Functions" (T. N. E. Greville, Ed.), pp. 1–35, Academic Press, New York, 1969.
6. S. Karlin, Best quadrature formulas and splines, *J. Approximation Theory* **4** (1971), 59–90.
7. G. G. Lorentz, The Birkhoff interpolation problem: New methods and results, *in* "Linear Operators and Approximation II," pp. 481–501, Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1974.
8. G. G. Lorentz and K. L. Zeller, Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **8** (1971), 43–48.
9. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Quadrature formulae and Hermite–Birkhoff interpolation, *Advances in Math.* **11** (1973), 93–112.

10. I. J. SCHOENBERG, On monosplines of least deviation and best quadrature formulae, *SIAM J. Numer. Anal.* **2** (1965), 144–170.
11. I. J. SCHOENBERG, On Hermite–Birkhoff interpolation, *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 538–543.
12. I. J. SCHOENBERG, On the Ahlberg–Nilson extension of spline-interpolation: The g-splines and their optimal properties, *J. Math. Anal. Appl.* **21** (1968), 207–231.
13. I. J. SCHOENBERG, Monosplines and quadrature formulae, *in* "Theory and Applications of Spline Functions" (T. N. E. Greville, Ed.), pp. 157–207, Academic Press, New York, 1969.
14. I. J. SCHOENBERG, A second look at approximative quadrature formulae and spline interpolation, *Advances in Math.* **4** (1970), 277–300.
15. H. S. SHAPIRO, "Topics in Approximation Theory," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1971.